

## خصائص المتباينات ١ Properties of Inequalities (1)

لأي عددين حقيقيين  $a, b$  إحدى هذه العلاقات متحقق :  $a < b$  أو  $a = b$  أو  $a > b$  . نكتب  $a \leq b$  للدلالة على أن  $a = b$  أو  $a < b$  كذلك  $a \geq b$  تعني  $a = b$  أو  $a > b$  .

خصائص في التباين

- (1) إذا كان  $a > b$  فإن  $a \pm c > b \pm c$
- (2) إذا كان  $a > b$  و  $c > d$  فإن  $a + c > b + d$
- (3) إذا كان  $a > b > 0$  و  $c > d > 0$  فإن  $ac > bd$
- (4) إذا كان  $ab > 0$  و  $a > b$  فإن  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- (5) إذا كان  $ab < 0$  و  $a > b$  فإن  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

أمثلة : Examples :

- (1) ليكن  $a, b$  عددين حقيقيين بحيث  $a > b$  أثبت أن  $a > \frac{a+b}{2} > b$  .
- (S1) بما أن  $a > b$  فإن  $a + a > a + b > b + b$  . إذا  $2a > a + b > 2b$  وبالقسمة على 2 نصل للمطلوب.

(2) إذا كان  $a, b, c, d$  أعداد حقيقية و  $a > b > c > d$  حدد أيهما أكبر من الأعداد التالية:

$$x = (a + b)(c + d), y = (a + c)(b + d), z = (a + d)(b + c)$$

(S2) باستخدام الخصائص المناسبة للتباين:

$$\begin{aligned} y - x &= (ab + cb + ad + cd) - (ac + bc + ad + bd) \\ &= d(c - b) - a(c - b) = (d - a)(c - b) > 0 \end{aligned}$$

إذا  $y > x$  . بالمثل تثبت أن  $z > y$  وبالتالي  $z > y > x$  .

- (3) إذا كانت  $a, b, c, d$  أعداد حقيقية بحيث  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$  فأثبت أن  $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 8$  .

(S3) من الشرط  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$  نستنتج أن  $a^2 \leq 4$  وبالتالي  $a \leq 2$  . إذا  $a^2(a - 2) \leq 0$

ومنه  $a^3 \leq 2a^2$  . بالمثل  $b^3 \leq 2b^2, c^3 \leq 2c^2, d^3 \leq 2d^2$  . بالجمع

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 = 8$$

تمارين Exercises

- (A) إذا كان  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$  حيث  $b, d \neq 0$  فأثبت أن  $\frac{a+b}{b} \leq \frac{c+d}{d}$  وأن التساوي متحقق إذا وفقط إذا

كان  $ad = bc$ .

(B) إذا كان  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$  حيث  $b, d > 0$  أثبت أن  $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$  وأن التساوي متحقق إذا وإذا فقط  $ad = bc$ .

(C) ليكن  $a, b > 0$  عددين حقيقيين موجبين، أثبت أن

$$\frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

(D) لتكن  $a, b, c, d$  أعداد حقيقية موجبة. أثبت أن

$$1 < \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < 2$$

(E) لتكن  $a, b, c$  أطوال مثلث قائم الزاوية حيث  $c$  طول الوتر. أثبت أن  $a^k + b^k < c^k$  حيث  $k > 2$  عدد صحيح.

(F) أثبت أن  $x^6 + 2 \geq x^4 + 2x$  لكل عدد حقيقي  $x$ .

(G) لدينا مثلث  $ABC$  أطواله  $a, b, c$ . أثبت أنه يمكن تكوين مثلث بأطوال  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ . هل العكس صحيح؟

(H) لدينا مثلث  $ABC$  أطواله  $a, b, c$ . أثبت أن يمكن تكوين مثلث بأطوال  $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ .

## خصائص المتباينات (٢)

### Properties of Inequalities (2)

#### القيمة المطلقة Absolute Value

تعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي  $a$  كما يلي

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{فمثلا } |32| = 32, \quad |-32| = 32, \quad |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2, \quad |-x^2| = x^2$$

#### خصائص القيمة المطلقة

$$|a| = |-a| \quad (١)$$

$$|a| = \sqrt{a^2} \quad (٢)$$

$$\pm a \leq |a| \text{ و } |a| \geq 0 \quad (٣)$$

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad (٤)$$

$$|ab| = |a| |b| \quad (٥)$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{حيث } b \neq 0 \quad (٦)$$

$$|a| \leq b \text{ إذا وإذا فقط } -b \leq a \leq b. \text{ بالمثل } |a| < b \text{ إذا وإذا فقط } -b < a < b. \quad (٧)$$

$$|a| \geq b \text{ إذا وإذا فقط } a \geq b \vee a \leq -b. \text{ بالمثل } |a| > b \text{ إذا وإذا فقط } a > b \vee a < -b. \quad (٨)$$

#### المتباينة المثلثية Triangle Inequality

$$|a + b| \leq |a| + |b| \text{ فإن } a, b \text{ عددين حقيقيين}$$

والتساوي يتحقق إذا وإذا فقط كان  $ab \geq 0$ . أي عندما  $a, b \geq 0$  أو  $a, b \leq 0$ . هذه المتباينة تسمى المتباينة

المثلثية Triangle Inequality.

البرهان : من خصائص القيمة المطلقة

$$\pm a \leq |a|$$

$$\pm b \leq |b|$$

بالجمع لدينا  $\pm(a+b) \leq |a| + |b|$  . إذا  $|a+b| \leq |a| + |b|$  .

### طريقة التريعات

تعتبر المتباينة  $x^2 \geq 0$  صحيحة لأي عدد حقيقي  $x$  . لذلك فمجموع مربعات أعداد حقيقية مقدار غير سالب دائماً . بلغة أخرى إذا كانت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  أعداداً حقيقية فإن

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0 \quad (*)$$

تستخدم هذه العلاقة في التحقق من صحة علاقة تبين ما . حيث ننقل إذا أمكن المتباينة المعطاة إلى متباينات أخرى مكافئة حتى نصل لمتباينة على الشكل  $x^2 \geq 0$  أو الشكل  $(*)$  .

### أمثلة Examples

(1) أثبت صحة المتباينة التالية والتي لا تقل أهمية عن المتباينة المثلثية

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

(S1) اكتب  $a = (a - b) + b$  وطبق المتباينة المثلثية

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

بنقل للطرف الآخر نجد أن  $|a| - |b| \leq |a - b|$  . بالتبديل بين  $a, b$  في هذه المتباينة الأخيرة نجد أن

$$|a| - |b| \leq |b - a| = |a - b|$$

إذن،  $|a| - |b| \leq |a - b|$  أي أن  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  .

(2) أوجد أصغر قيمة للدالة  $f(x) = |x| + |x + 1| + |x + 2|$  .

(S2) بما أن  $|x| = |-x|$  من المتباينة المثلثية لدينا

$$|x| + |x + 2| = |-x| + |x + 2| \geq -x + x + 2 = 2$$

إذا  $2 \geq |x+1| + 2 \geq |x+1| + |x| + |x+2| = f(x)$  . لاحظ أن الدالة تبلغ القيمة 2 فمثلا  
عندما  $x = -1$  فإن  $f(-1) = 2$  .

(3) لتكن  $a, b, c$  أعداد حقيقية. أثبت أن  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  وبين أن التساوي متحقق إذا  
وإذا فقط  $a = b = c$  .

(S3) بالضرب في 2 ينتج لنا  $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$  . أعد ترتيب الحدود كالتالي:

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ca \geq 0$$

أي أن  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$  وهي متباينة متحققة لأي أعداد حقيقية  $a, b, c$  . التساوي  
يتحقق إذا وإذا فقط  $(a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-a)^2 = 0$  وهذا ممكن إذا وإذا فقط  $a = b = c$  .

### تمارين Exercises

(A) لأي عددين حقيقيين  $a, b$  أثبت أن  $|a+b| = |a| + |b|$  إذا وإذا فقط كان  $ab \geq 0$  . أي أن  
التساوي في المتباينة المتثلثية متحقق إذا وإذا فقط  $a, b \geq 0$  أو  $a, b \leq 0$  .

(B) أثبت التعميم التالي للمتباينة المتثلثية. إذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  أعداد حقيقية فإن

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

(C) ليكن  $a, b > 0$  عددين حقيقيين أثبت أن

$$\frac{2}{(1/a) + (1/b)} \leq \sqrt{ab}$$

(D) لأي عددين حقيقيين  $a, b$  أثبت أن

$$|ab| = |a| |b| \quad (i) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (ii) \quad \text{حيث } b \neq 0$$

(E) أثبت صحة المتباينة التالية  $(y-3)^2 + (y-5)^2 + (y+9)^2 + (y+11)^2 \geq 200$  .

(F) لتكن  $a, b, c, d$  أعداد حقيقية بحيث  $a < b < c < d$  ولنعرف الدالة  $f$  كما يلي

$$f(a, b, c, d) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2$$

أثبت أن  $f(a, c, b, d) > f(a, b, c, d) > f(a, b, d, c)$  .

(G) لتكن  $a, b, c$  أعداداً حقيقية. أثبت أن

$$(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) \leq (a^3 - b^3)^2$$

$$(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$$

(H) أثبت أن  $x^2 + (y + 2)^2 + x(y + 2) \geq 6(x + y)$  وحدد متى يتحقق التساوي.

(I) إذا كانت  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  فإن  $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

(J) إذا كان  $x_1 \geq x_2, y_1 \geq y_2$ ، فأثبت الحالة الخاصة من متباينة إعادة الترتيب:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \geq x_1 y_2 + x_2 y_1$$

(K) ليكن  $x, y > 0$ . أثبت أن  $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

## متباينة الوسط الحسابي - الوسط الهندسي

### Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality (1)

إذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  أعداد حقيقية موجبة فإن الوسط الحسابي  $AM$  لهذه الأعداد هو حاصل جمعها مقسوماً على عددها. الجذر النوني لحاصل ضرب هذه الأعداد يسمى الوسط الهندسي ورمزه  $GM$ . إذا

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

### متباينة الوسط الحسابي - الوسط الهندسي

إذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  أعداد حقيقية فإن

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

ويتحقق التساوي إذا وفقط إذا كان  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

عندما  $n = 2$  نحصل على الحالة الخاصة  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  ويمكن برهنتها بنشر المتباينة  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ .

إذا جعلنا  $a = x, b = \frac{1}{x}$  نحصل على المتباينة التي تبين العلاقة بين العدد الموجب  $x$  ومقلوبه  $\frac{1}{x}$ .

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

### متباينة الوسط الهندسي - الوسط التوافقي

إذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  أعداد حقيقية فإن

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

ويتحقق التساوي إذا وفقط إذا كان  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . نرمز لهذه المتباينة بالرمز  $GM - HM$

البرهان: من متباينة  $AM - GM$  لدينا

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad \text{إذن}$$

التساوي متحقق إذا وإذا فقط  $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_n}$  ، وهذا متحقق إذا وإذا فقط  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  .  
ترتبط الأوساط الثلاثة بالعلاقة التالية

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

### أمثلة Examples

(1) باستخدام متباينة AM-GM نحصل على عدة متباينات مفيدة في معالجة متباينات أكبر منها سنقدم الجزء الثاني من هذه المتباينات الأساسية في التمارين:

$$(i) \text{ إذا كانت } a, b \text{ أعداد حقيقية فإن } a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(ii) \text{ إذا كانت } a, b, c \text{ أعداد حقيقية فإن } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$(iii) \text{ إذا كانت } a, b > 0 \text{ فإن } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

$$(iv) \text{ إذا كانت } a, b, c \text{ أعداد حقيقية فإن } (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

$$(v) \text{ لكل } a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \text{ فإن}$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

(S1)

$$(i) \text{ باستخدام AM-GM: } a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2|ab| \geq 2ab$$

$$(ii) \text{ اكتب الطرف الأيسر بطريقة أخرى وطبق متباينة الفقرة السابقة:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} \geq ab + bc + ca$$

طريقة أخرى: بضرب الطرف الأيسر في 2 واستخدام متباينة فرقة (1).

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (b^2 + a^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\text{بالقسمة على 2 نجد أن } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$(iii) \text{ ليست سوى تربيع للمتباينة AM-GM في حالة عددين.}$$

$$(iv) \text{ سنعامل كل قوس على حده بواسطة AM-GM وهذا تكتيك نستخدمه في بعض الحالات.}$$



$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

بضرب هذه المتباينات:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

$$(2) \text{ إذا كانت } a, b > 0 \text{ بحيث } a + b = 1 \text{ أثبت أن } \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

(S2) باستخدام بعض العمليات الجبرية لنقل المسألة لشكل مناسب ثم نطبق AM-HM.  
نكتب البسط في المتباينة بشكل يساعد على التبسيط:

$$\frac{(a+1)^2 - (2a+1)}{a+1} + \frac{(b+1)^2 - (2b+1)}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{إذن، } a+1 - \frac{2a+1}{a+1} + b+1 - \frac{2b+1}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

$$3 - \frac{2(a+1)-1}{a+1} - \frac{2(b+1)-1}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

هنا استخدمنا الشرط  $a + b = 1$ . بالتبسيط مرة أخرى ينتج لنا

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{3} \text{ ومنه } -1 + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{(a+1) + (b+1)} = \frac{4}{3}$$

$$(3) \text{ ليكن } n \text{ عدد صحيح موجب، أثبت أن } 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n$$

(S3) بأخذ الجذر النوني للطرفين وتطبيق AM-GM:

$$\sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} < \frac{1+3+\cdots+2n-1}{n}$$

هنا كتبنا  $<$  وليس  $\leq$  وذلك لكون الأعداد مختلفة. المجموع  $1+3+\cdots+2n-1$  عبارة عن متسلسلة

حسابية حدها الأول  $a_1 = 1$  وأساسها 2 وحدها الأخير  $a_n = a + (n-1)d = 1 + 2(n-1)$  فهي

$$\text{مكونة من } n \text{ حد ولذلك مجموعها } n^2 = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \text{ . إذن}$$

$$\sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} < \frac{n^2}{n} = n$$

$$(4) \text{ إذا كانت } a, b, c > 0 \text{ أثبت أن } \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

(S4) باستخدام AM-GM لدينا

$$2(a^2 + b^2) = a^2 + b^2 + (a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

بالقسمة على  $a + b$  ينتج لنا  $\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}$ . بطريقة مماثلة نجد أن  $\frac{b^2 + c^2}{b + c} \geq \frac{b + c}{2}$  و

$$\frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq \frac{c + a}{2} \text{ . يجمع هذه المتباينات الثلاث نصل للمطلوب.}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq \frac{a + b}{2} + \frac{b + c}{2} + \frac{c + a}{2} = a + b + c$$

(5) متباينة نسبت Nesbitt's Inequality: على الرغم من أنها ليست من المتباينات المعيارية في مسابقات الأولمبياد ولكن تعتبر من أشهر المتباينات الصغرى وتمتاز بشكلها المبسط.  
إذا كان  $a, b, c > 0$  فإن

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

(S5) سنقدم هنا إحدى طرائق الحل وفي مواضيع قادمة سنناقش طرائق أخرى للحل. اجعل

$$S = \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \text{ و عرف } A, B \text{ كما يلي:}$$

$$A = \frac{c}{b + c} + \frac{a}{c + a} + \frac{b}{a + b}, \quad B = \frac{b}{b + c} + \frac{c}{c + a} + \frac{a}{a + b}$$

واضح أن  $A + B = 3$ . الآن

$$A + S = \frac{a + b}{b + c} + \frac{b + c}{c + a} + \frac{c + a}{a + b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a + b}{b + c} \cdot \frac{b + c}{c + a} \cdot \frac{c + a}{a + b}} = 3$$

بالمثل  $B + S \geq 3$ . إذا  $(A + S) + (B + S) \geq 6$  أي أن  $(A + B) + 2S \geq 6$  ومنه  $S \geq \frac{3}{2}$ .

#### تمارين Exercises

في المسائل من (A) إلى (G) نقدم الجزء الثاني من المتباينات الصغرى المفيدة في معالجة متباينات أكبر.

$$(A) \text{ إذا كانت } a, b \text{ أعداد حقيقية فإن } a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

$$(B) \text{ لأي } a, b, c > 0 \text{ فإن } ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$$

$$(C) \text{ إذا كانت } a, b, c > 0 \text{ أعداد حقيقية فإن } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

$$(D) \text{ إذا كانت } a, b, c \text{ أعداد حقيقية فإن } 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$(E) \text{ إذا كانت } a, b, c, d > 0 \text{ أعداد حقيقية فإن } \frac{a + b + c + d}{4} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2}$$

$$(F) \text{ إذا كانت } a, b, c \text{ أعداد حقيقية فإن } a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

$$(G) \text{ إذا كانت } a, b > 0 \text{ فإن } a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

$$(H) \text{ لتكن } a, b, c, d > 0 \text{ أثبت أن } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4 \text{ . عمم النتيجة.}$$

$$(I) \text{ إذا كانت } a, b, c > 0, (1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8 \text{ أثبت أن } abc \leq 1 \text{ وأن } a + b + c \geq 3$$

$$(J) \text{ لتكن } a, b, c > 0 \text{ أثبت أن } \frac{2ab}{a + b} + \frac{2bc}{b + c} + \frac{2ca}{c + a} \leq a + b + c$$

$$(K) \text{ إذا كانت } a, b, c > 0 \text{ أثبت أن } 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 15abc$$

$$(L) \text{ إذا كانت } a, b, c > 0 \text{ بحيث } a + b + c = 1 \text{ أثبت أن } \left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 64$$

$$(M) \text{ إذا كان } a, b, c > 0 \text{ فإن } \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$(N) \text{ لتكن } a, b, c > 0 \text{ . قدم برهان آخر لمتباينة نسبت } \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

$$(O) \text{ إذا كان } a, b, c > 0 \text{ أثبت أن } \frac{a - b}{b + c} + \frac{b - c}{c + d} + \frac{c - d}{d + a} + \frac{d - a}{a + b} \geq 0$$

## متباينة كوشي - شوارتز Cauchy - Schwarz Inequality

إذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و  $b_1, b_2, \dots, b_n$  أعداداً حقيقية فإن

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

التساوي متحقق إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي  $c$  بحيث  $a_i = c b_i$  لكل  $1 \leq i \leq n$ .

هذه المتباينة تسمى متباينة كوشي-شوارتز Cauchy-Schwarz inequality. أحيانا نكتب المتباينة بالشكل التالي

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

تمهيدية Titu Lemma: إذا كانت  $a, b, c$  أعداد حقيقية و  $x, y, z > 0$  فإن

$$\frac{(a + b + c)^2}{x + y + z} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}$$

هذه الحقيقة ناتجة مباشرة من متباينة كوشي شوارتز وذلك باختيار مناسب وإجراء بعض العمليات الجبرية. لاحظ البداية

$$(a + b + c)^2 = \left( \frac{a}{\sqrt{x}} \sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}} \sqrt{y} + \frac{c}{\sqrt{z}} \sqrt{z} \right)^2$$

اجعل  $\left( \frac{a}{\sqrt{x}}, \frac{b}{\sqrt{y}}, \frac{c}{\sqrt{z}} \right) = (a_1, a_2, a_3)$  و  $(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}) = (b_1, b_2, b_3)$  و طبق متباينة كوشي-شوارتز

$$(a + b + c)^2 = \left( \frac{a}{\sqrt{x}} \sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}} \sqrt{y} + \frac{c}{\sqrt{z}} \sqrt{z} \right)^2 \leq \left( \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \right) (x + y + z)$$

$$\frac{(a + b + c)^2}{x + y + z} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \text{ بالقسمة نصل للمطلوب}$$

يمكن تعميم هذا الحوار لـ  $n$  من الأعداد. فإذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  فإن

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \leq \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n}$$

### أمثلة Examples

(1) إذا كان  $a, b, c, d$  أعداد حقيقية بحيث  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$  أثبت أن  $a = b = c = d$ .

(S1) من متباينة كوشي شوارتز  $ab + bc + cd + da \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  والتساوي من المعطيات

متحقق. إذا يوجد عدد حقيقي  $k$  بحيث  $a = kb, b = kc, c = kd, d = ka$  وبالتالي  $k^4 = 1$  ومنه

$k = \pm 1$ . الفرض  $k = -1$  يؤدي إلى  $a = -b$  وبالتالي  $ab = -b^2 < 0$  وبالمثل بقية الحدود وبالتالي  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 0$  وهذا مستحيل، إذا  $k = 1$ . إذا  $a = b = c = d$ .

(2) لأي أعداد حقيقية  $a, b, c$  ليست أصفار برهن أن  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ .

(S2) باستخدام متباينة كوشي-شوارتز ونبدأ من الطرف الأيمن بعد كتابته بشكل ملائم:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = \frac{\overbrace{a}^{a_1}}{\overbrace{b}^{b_1}} \cdot \frac{\overbrace{b}^{b_2}}{\overbrace{c}^{c_2}} + \frac{\overbrace{c}^{a_2}}{\overbrace{a}^{b_2}} \cdot \frac{\overbrace{a}^{a_3}}{\overbrace{b}^{b_3}} + \frac{\overbrace{b}^{a_3}}{\overbrace{c}^{b_3}} \cdot \frac{\overbrace{c}^{c_3}}{\overbrace{a}^{b_3}} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2}} \sqrt{\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2}}$$

$$\text{إذن، } \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2}.$$

(3) إذا كان  $x, y > 0$  و  $x + y = 1$  أثبت أن  $(1 + 2^n)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \left(1 + \frac{1}{y^n}\right)$ .

(S3) بكتابة  $1 = (x + y)^n$  لنبدأ من الجذر التربيعي للطرف الأيمن

$$\sqrt{\left(1 + \frac{(x + y)^n}{x^n}\right) \left(1 + \frac{(x + y)^n}{y^n}\right)} = \sqrt{\left(1 + \left(1 + \frac{x}{y}\right)^n\right) \left(1 + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n\right)}$$

للتبسيط سنكتب  $\frac{x}{y} = a, \frac{y}{x} = b$  ونطبق متباينة كوشي-شوارتز :

$$\sqrt{\left(1 + (1 + a)^n\right) \left(1 + (1 + b)^n\right)} \geq 1 + \sqrt{(1 + a)^n} \sqrt{(1 + b)^n}$$

طبق الآن متباينة AM-GM على  $1 + a, 1 + b$  مع ملاحظة أن  $ab = 1$ .

$$\sqrt{\left(1 + (1+a)^n\right)\left(1 + (1+b)^n\right)} \geq 1 + \sqrt{(1+a)^n} \sqrt{(1+b)^n} \geq 1 + \sqrt{(2\sqrt{a})^n} \sqrt{(2\sqrt{b})^n} = 1 + 2^n$$

(4) لتكن  $a, b, c > 0$  أعداد حقيقية بحيث  $abc = 1$  أثبت أن

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

(S4) باستخدام التعويض (وهو أسلوب فعال أحيانا) اجعل  $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$  نجد أن  $xyz = 1$  و

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} = \sum_{cyc} \frac{1}{\frac{1}{x^3}(\frac{1}{y} + \frac{1}{z})} = \sum_{cyc} \frac{x^2}{z+y}$$

في الخطوة الأخيرة استخدمنا  $zy = \frac{1}{x}$  من حقيقة تيتو لدينا

$$\sum_{cyc} \frac{x^2}{z+y} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}$$

الآن طبق AM-GM لنصل للمطلوب  $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$

(5) لتكن  $a, b, c > 0$  حيث  $abc = 2$  أثبت أن

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}$$

(S5) باستخدام متباينة كوشي شوارتز

$$\begin{aligned} 2\left(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}\right)^2 &= 2\left(\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}}\sqrt{b+c} + \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{b}}\sqrt{c+a} + \frac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{c}}\sqrt{a+b}\right)^2 \\ &\leq 2(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right) \\ &= (a^3 + b^3 + c^3)(bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)) \end{aligned}$$

ولكن من القانون  $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$  حيث  $x, y \geq 0$  نستنتج أن

$$\begin{aligned} ab(b+c) + bc(b+c) + ca(c+a) &\leq (a^3 + b^3) + (b^3 + c^3) + (c^3 + a^3) \\ &= 2(a^3 + b^3 + c^3) \end{aligned}$$

و بالتعويض .

$$2\left(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}\right)^2 \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)^2$$

فيما سبق نجد أن

اقسم على 2 وخذ الجذر للطرفين لتصل للمطلوب.

### تمارين Exercises

$$(A) \text{ أثبت أن } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \geq \frac{(1 + 2 + \dots + n)^2}{n}$$

$$(B) \text{ لتكن } a, b, c, d > 0 \text{ برهن أن } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a + b + c + d}$$

$$(C) \text{ لتكن } x, y, z > 0 \text{ أثبت أن } \frac{2}{2x + y} + \frac{2}{2z + y} \geq \frac{4}{x + y + z}$$

$$(D) \text{ لتكن } a, b, c, d > 0 \text{ بحيث } a + b + c + d = 1 \text{ برهن أن}$$

$$\frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + d} + \frac{d^2}{d + a} \geq \frac{1}{2}$$

$$(E) \text{ إذا كانت } a, b, c, d > 0 \text{ برهن أن } \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a + d)(b + c)}$$

$$(F) \text{ استخدم حقيقة تيتو لتقديم طريقة ثالثة لإثبات متباينة نسبت.}$$

$$(G) \text{ لتكن } a, b > 0 \text{ أعداد موجبة أثبت أن } 8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$$

$$(H) \text{ برهن أن } \frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b} \geq \sec(a - b), \quad a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(J) \text{ أثبت أن } \frac{a - b}{a + 2b + c} + \frac{b - c}{a + b + 2c} + \frac{c - a}{2a + b + c} \geq 0$$

$$(K) \text{ لتكن } a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \text{ أعداد حقيقية بحيث } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \text{ أثبت أن}$$

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n}$$

## مسائل القيم القصوى واستراتيجيات أخرى في حل المتباينات

فيما تبقى سيكون تركيزنا على مناقشة بعض المسائل التي يطلب فيها تحديد أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمقدار ما. اعتدنا على أن نعالج هذه المسائل باستخدام حساب التفاضل والتكامل ولكن سنرى كيف أن هناك مسائل يمكن حلها بطرق أولية. كذلك سيقدم أمثلة ومسائل تعتمد على استراتيجيات أساسية كالإضافة والتجزيء وطرق في توظيف القيود مثل  $abc = 1$  و  $a + b + c = 2$  وكل هذا يتكرر استخدامه في حل المتباينات.

### أمثلة Examples

(1) قطعة من الورق المقوى محيطها 20 وحدة طول. ما هي أبعادها لتكون مساحتها أكبر ما يمكن؟

(S1) كما نعلم لهذه المسألة حل ومألوف أيضاً باستخدام الاشتقاق. سنقوم بحلها باستخدام متباينة AM-GM.

ليكن  $x, y$  بعدى المستطيل. إذا  $x + y = 10$ . بما أن  $x, y > 0$  يمكن استخدام AM-GM لنجد أن

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 5$$

إذن المساحة  $xy$  تحقق المتباينة  $xy \leq 25$ . أي أن 25 وحدة مربعة هي حد أعلى للمساحة. هل نبليغ هذا الحد

ومتى؟ التساوي في  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 5$  متحقق إذا وإذا فقط كان  $x = y$ . إذا  $x^2 = 25$  وبالتالي أكبر

مساحة ممكنة هي عندما تكون القطعة مربعة وبعدها  $x = 5$ .

(2) إذا كان  $a > b > 0$  أوجد أصغر قيمة يمكن أن يبلغها المقدار  $a + \frac{1}{b(a-b)}$ .

(S2) بما أن  $b(a-b) \leq \left(\frac{b+(a-b)}{2}\right)^2$  فإن  $\frac{1}{b(a-b)} \geq \frac{4}{a^2}$  وبالتالي فالتساوي متحقق إذا وإذا فقط

$$b = a/2 \text{ أي } b = (a-b)$$

$$a + \frac{1}{b(a-b)} \geq a + \frac{4}{a^2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{4}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{a^2}} = 3$$

والتباين الأخير يصبح تساويًا إذا وإذا فقط  $\frac{4}{a^2} = \frac{a}{2}$ ، ومنه  $a^3 = 8$  أي  $a = 2$ . إذن أصغر قيمة ممكنة



هي 3 والمقدار يمكن أن يبلغها إذا وإذا فقط  $a = 2$  و  $b = \frac{a}{2} = 1$ .

طريقة ثانية: هنا اعتمدنا على إضافة مناسبة ثم تطبيق AM-GM لنصل مباشرة للحد العلوي 3.

$$a + \frac{1}{b(a-b)} = (a-b) + b + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{(a-b) \cdot b \cdot \frac{1}{b(a-b)}} = 3$$

التساوي متحقق إذا وإذا فقط  $(a-b) = b = \frac{1}{b(a-b)}$  وهذا فقط عندما  $(a,b) = (2,1)$ .

$$(3) \text{ إذا كان } a, b, c > 0 \text{ برهن أن } \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$$

(S3) باستخدام متباينة الوسط الحسابي-الوسط الهندسي لدينا

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b^2} + b + b &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2} \cdot b \cdot b} = 3a \\ \frac{b^3}{c^2} + c + c &\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^2} \cdot c \cdot c} = 3b \\ \frac{c^3}{a^2} + a + a &\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^2} \cdot a \cdot a} = 3c \end{aligned}$$

بجمع هذه المتباينات الثلاث  $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + 2(a+b+c) \geq 3(a+b+c)$  وبطرح  $2(a+b+c)$  من الطرفين نصل للمطلوب.

$$(4) \text{ إذا كان } x, y \text{ أعداد حقيقية برهن أن } x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$$

(S4) بالتجزئ واستخدام متباينة AM-GM لدينا

$$\frac{x^2 + (y^2 + z^2)}{2} \geq x\sqrt{y^2 + z^2}, \quad \frac{(x^2 + z^2) + y^2}{2} \geq y\sqrt{x^2 + z^2}$$

وبالجمع لكلا المتباينتين نصل للمطلوب.

$$(5) \text{ إذا كان } a, b, c > 0 \text{ بحيث } a + b + c = 1 \text{ أثبت أن } \frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}$$

(S5) في هذه المسألة سنحتاج لبعض المتباينات التي سبق وتعاملنا معها. سنحول المتباينة لأخرى متجانسة من

الدرجة صفر، وذلك بتوظيف الشرط  $a + b + c = 1$  في البسط كما يلي:

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{a(a+b+c)}{(b+c)^2} + \frac{b(a+b+c)}{(c+a)^2} + \frac{c(a+b+c)}{(a+b)^2} \\ &= \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{4} \end{aligned}$$

ولكن من المتباينة المعروفة  $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$  نستنتج أن

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)^2$$

وحصلنا على متباينة نسبت المعروفة داخل التربيع. إذا

$$LHS \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

### تمارين Exercises

(A) لتكن  $a, b, c > 0$  بحيث  $a + b + c = 2$  أثبت أن  $ab^2c \leq \left(\frac{1}{a+b+c}\right)^2$ .

(B) إذا كان  $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$  أوجد أكبر قيمة يمكن أن يأخذها  $ab + bc + cd + da$ .

(C) أوجد القيمة العظمى للدالة  $y = 3 \cos \theta + 4 \sin \theta$  على المجال  $(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ .

(D) من بين جميع المثلثات ذات المحيط  $P$  أوجد أطوال أضلاع المثلث الذي مساحته أكبر ما يمكن.

(E) إذا كان  $a, b, c > 0$  أثبت أن  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$ .

(F) سبق وأثبتنا أنه إذا كان لتكن  $a, b, c > 0$  فإن  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$  استخدم الإضافة أو

التجزئ في تقديم حل آخر.

(G) إذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  بحيث  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$  برهن أن  $\prod_{k=1}^n (2 + a_k) \geq 3^n$ .

(H) ليكن  $a > 0$  أثبت أن  $a^{11} - 3a^5 + a^4 + 1 \geq 0$ .

$$(I) \text{ لتكن } a, b, c > 0 \text{ أعداد حقيقية برهن أن: } \frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

$$(J) \text{ إذا كان } a, b, c > 0 \text{ بحيث } abc = 1 \text{ أثبت أن } \frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3.$$

$$(K) \text{ إذا كان } a, b, c > 0 \text{ و } a+b+c = 3 \text{ أثبت أن}$$

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

$$(L) \text{ من بين جميع الأشكال متوازية الأضلاع بمساحة معينة لسطحها الخارجي فإن المكعب له أكبر حجم.}$$

متباينة إعادة الترتيب: إذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و  $b_1, b_2, \dots, b_n$  أعداد حقيقية (ليست بالضرورة موجبة) بحيث  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  و  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  فإن

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

وذلك لكل تبديلة  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  لـ  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . التساوي في الجزء الأيمن يتحقق إذا وإذا فقط

$$b_1 = c_1, b_2 = c_2, \dots, b_n = c_n \text{ وفي الأيسر يتحقق التساوي إذا وإذا فقط}$$

$$b_n = c_1, b_{n-1} = c_2, \dots, b_1 = c_n.$$

تذكر بأن التبديلة تطبيق  $\sigma$  تقابل من مجموعة منتهية  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  إلى نفسها ونعبر عن هذا التطبيق بالشكل

$$\text{حيث } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & \dots & x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \text{ صور } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ على الترتيب.}$$

$$(M) \text{ لتكن } a, b, c \text{ ثلاثة أعداد حقيقية، و } n > 0 \text{ عدد زوجي، أثبت أن:}$$

$$a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$$

$$(N) \text{ لتكن } a, b, c > 0 \text{ أعداد حقيقية برهن بمتباينة إعادة الترتيب أن } \frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$